

Kraków, 26 kwietnia 2025 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Marty Piecyk
Graph Homomorphisms – Exploring the Boundaries of Tractability

Rozprawa doktorska Marty Piecyk dotyczy problemu istnienia homomorfizmu z danego grafu G w inny dany graf H , czyli funkcji przekształcającej wierzchołki grafu G na wierzchołki grafu H , dla której obrazem każdej krawędzi w G jest pewna krawędź w H . Jeśli graf H jest grafem pełnym, to homomorfizm z G w H jest właściwym kolorowaniem grafu G . Zatem rozważany problem homomorfizmu grafów jest uogólnieniem klasycznego i często badanego problemu właściwego kolorowania grafów. Wiadomo, że dla ustalonego grafu H niezawierającego pętli i niebędącego grafem dwudzielnym, problem homomorfizmu jest problemem NP-trudnym. Oznacza to (przy założeniu $P \neq NP$), że nie ma algorytmu rozwiązującego ten problem w czasie wielomianowym ze względu na wielkość grafu G . Naturalne w takiej sytuacji jest rozważenie pewnego parametru ograniczającego „złożoność” grafu G i pytanie o algorytm rozwiązujący problem homomorfizmu dla grafów z takiej węższej klasy. Ma to uzasadnienie praktyczne, gdyż często grafy które modelują różne naturalne zjawiska (na przykład sieć społecznościową, połączenia drogowe, czy topologię układów scalonych) mają właśnie dość ograniczoną strukturę. W omawianej rozprawie rozważane są dwa takie parametry ograniczające złożoność grafu – szerokość cięciowa oraz średnica. Oba te parametry są dość naturalne i były rozważane już wcześniej w tym kontekście w wielu publikacjach. Wyniki naukowe przedstawione w rozprawie wpisują się we współczesne badania w dziedzinie i istotnie poszerzają naszą wiedzę w omawianym zagadnieniu.

Pierwszy rozdział rozprawy zaczyna się od wprowadzenia do algorytmicznych problemów grafowych i opisu dotychczasowych istotnych wyników, ze szczególnym uwzględnieniem szerokości cięciowej, średnicy oraz problemu homomorfizmu grafów. Następnie przedstawione są najważniejsze wyniki naukowe uzyskane w ramach rozprawy doktorskiej. Warto podkreślić tu mnogość wymienionych odniesień do wcześniejszych publikacji, uwypuklających dogłębne zrozumienie przez Martę Piecyk omawianej tematyki i dobre osadzenie swojej pracy naukowej w kontekście wcześniejszych badań.

W drugim i trzecim rozdziale wprowadzone są pojęcia i oznaczenia stosowane w rozprawie oraz podstawowe narzędzia używane w problemie homomorfizmu grafów. Przedstawiono także hipotezy sprzed ponad 20 lat, które implikują pewne własności strukturalne grafów umożliwiające dowodzenie dolnych ograniczeń na czas działania szukanych algorytmów. Istotna część opisanych tutaj metod pochodzi z pracy Marty Piecyk napisanej wspólnie z Okrasą i Rzażewskim jeszcze przed rozpoczęciem studiów doktoranckich.

Rozdział czwarty stanowi jedną z dwóch głównych części rozprawy i zawiera wyniki dotyczące problemu homomorfizmu przy ograniczonej szerokości cięciowej grafu G . Mówimy, że graf ma szerokość cięciową co najwyżej k , jeśli istnieje taka kolejność jego wierzchołków, że pomiędzy każdym zbiorem początkowych wierzchołków a pozostałymi wierzchołkami jest co najwyżej k krawędzi. Wiadomo (dzięki wcześniejszej pracy Piecyk i Rzażewskiego), że przy założeniu ETH nie istnieje algorytm rozwiązujący problem homomorfizmu z grafu G o szerokości cięciowej co najwyżej k w graf H , który działa w czasie $c^k \cdot |G|^{\mathcal{O}(1)}$ dla uniwersalnej stałej c niezależnej od H . Z drugiej strony, standardowe programowanie dynamiczne pozwala rozwiązać ten problem w czasie $|H|^k \cdot |G|^{\mathcal{O}(1)}$. Dlatego dość naturalne jest pytanie o optymalną stałą c_H , zależną od grafu H , dla której rozważany problem da się rozwiązać w czasie $c_H^k \cdot |G|^{\mathcal{O}(1)}$ i nie da się tego zrobić w „znacząco” lepszym czasie. Warto dodać, że w przypadku problemu właściwego kolorowania grafów, czyli gdy H jest grafem pełnym, taka stała jest znana. W omawianej rozprawie przedstawiono twierdzenia sugerujące, że w ogólności tą optymalną stałą może być $c_H = \text{mimsup}^*(H)$, gdzie mimsup^* jest pewnym szczególnym parametrem grafowym. Udowodniono następujące istotne fakty dotyczące problemu homomorfizmu do ustalonego grafu H :

- Przy założeniu SETH nie istnieje algorytm działający w czasie znacząco szybszym niż $\text{mimsup}^*(H)^k \cdot |G|^{\mathcal{O}(1)}$ dla prawie wszystkich grafów niedwudzielnych H , a dla wszystkich grafów niedwudzielnych przy dodatkowym założeniu prawdziwości wspomnianych wcześniej hipotez strukturalnych sprzed ponad 20 lat.
- Największa możliwa liczba stanów koniecznych w naturalnym programowaniu dynamicznym wynosi $\text{mimsup}^*(H)^k$.
- Istnieje algorytm działający w czasie $2^{\mathcal{O}(\text{mimsup}^*(H) \cdot k \log k)} \cdot |G|^{\mathcal{O}(1)}$.

Powyższe wyniki, których autorami poza Martą Piecyk są Carla Groenland, Isja Mannens, Jesper Nederlof i Paweł Rzażewski, zostały zaprezentowane na prestiżowej konferencji informatycznej *ICALP*. Wprawdzie te rezultaty nie dają pełnego rozwiązania rozważanego problemu, niemniej stanowią istotny postęp w tym trudnym zagadnieniu. Ich dowody są dość techniczne, wymagają sporej zawziętości oraz znajomości szerokiego aparatu metodologicznego, w tym elementów algebry liniowej.

Piąty rozdział rozprawy doktorskiej stanowi jej drugą główną część i dotyczy problemu istnienia homomorfizmu z grafu G o ograniczonej średnicy w graf H . Mówimy, że graf ma średnicę co najwyżej k , jeśli każde dwa wierzchołki połączone są ścieżką składającą się z co najwyżej k krawędzi. Mimo wielu prac naukowych w tej tematyce, już dla $H = K_3$, czyli dla problemu właściwego kolorowania grafów trzema kolorami, nie mamy dobrych ograniczeń na czas trwania algorytmów dla grafów G o ograniczonej średnicy. Nawet dla grafów o średnicy 2 nie wiemy czy istnieje algorytm działający w czasie wielomianowym ze względu na wielkość grafu G . Mertzios i Spirakis pokazali w 2013 roku, że istnieje algorytm rozwiązujący problem właściwego kolorowania trzema kolorami grafów na n wierzchołkach o średnicy 2 działający w czasie $2^{\mathcal{O}(\sqrt{n \log n})}$. W rozprawie doktorskiej poprawiono ten wynik, wskazując algorytm działający w czasie $2^{\mathcal{O}(n^{1/3} \log^2 n)}$ i to w ogólniejszej wersji listowej i ważonej. Udowodniono także istnienie algorytmu rozwiązującego analogiczny problem dla grafów o średnicy co najwyżej 3 działającego w czasie $2^{\mathcal{O}(n^{2/3} \log^{2/3} n)}$ i wykazano, że ten problem w wersji ważonej przy założeniu ETH nie ma algorytmu działającego w czasie $2^{o(n)}$. Powyższe wyniki, uzyskane wspólnie z Michałem Dębsem i Pawłem Rzażewskim, zostały zaprezentowane na prestiżowej konferencji informatycznej *ESA* oraz opublikowane w czasopiśmie *SIAM Journal on Discrete Mathematics*. Ich dowody używają różnych redukcji i zasad rozgałęziania oraz pomysłowego podejścia probabilistycznego. Rezultaty te niewątpliwie stanowią istotny postęp w interesującym i badanym problemie, dlatego też były już kilkakrotnie cytowane przez innych naukowców.

W dalszej części piątego rozdziału rozprawy doktorskiej rozpatrywany jest problem homomorfizmu z grafu G o ograniczonej średnicy w graf H inny niż K_3 omówiony wcześniej. Najpierw udowodnione jest, że jeśli H jest grafem niezawierającym trójkąta, to istnieje algorytm rozwiązujący rozważany problem dla grafów o średnicy 2 w czasie wielomianowym. Dowód tego faktu jest relatywnie krótki i używa dość naturalnych redukcji. Niestety nie zawarto po nim rozważań dotyczących grafów o większej średnicy. Następnie analizowany jest specjalny przypadek gdy graf H jest cyklem długości $2k + 1$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geq 2$. Wykazano, że istnieje wielomianowy algorytm dla grafów o średnicy $k + 1$, podwykładniczy dla średnicy $k + 2$ oraz zakładając ETH, że nie ma algorytmu podwykładniczego dla grafów o średnicy $2k + 2$. Rezultaty dotyczące homomorfizmu w nieparzysty cykl zostały opublikowane w samodzielnej pracy zaprezentowanej na prestiżowej konferencji informatycznej *MFCS*. Dowody są techniczne i w głównej mierze dość specyficzne do problemu, więc ciężko je zastosować w szerszym kontekście, niemniej są pomysłowe i oryginalne. Warto podkreślić, że wyniki te zostały uzyskane indywidualnie, co wyraziście dowodzi, że Marta Piecyk umie samodzielnie prowadzić pracę naukową na dobrym poziomie.

Rozprawa doktorska kończy się krótkim podsumowaniem pozostałych wyników naukowych Marty Piecyk oraz załącznikiem zawierającym formalne dowody analitycznych faktów pominiętych w dowodach głównych twierdzeń. Myślę, że wydzielenie tych fragmentów analitycznych do załącznika było słuszną decyzją, żeby równocześnie nie zamącać głównego dowodu, jak i nie pozostawiać luk w uzasadnieniach.

Pod względem redakcyjnym rozprawa doktorska napisana jest starannie i poprawnie. Zauważyłem trochę literówek czy drobnych błędów, nie przeszkadzały one jednak w całościowym zrozumieniu pracy. Widać, że autorka przywiązywała dużą uwagę by przekazać intuicje oraz zarysować ogólne idee prezentowanych algorytmów czy ramowe plany dowodów. Niektóre definicje są przypominane po dłuższym czasie od ich wcześniejszego użycia, co ułatwia czytanie. Dowody głównych twierdzeń są precyzyjnie opisane i odpowiednio ustrukturyzowane, m.in. poprzez opatrzenie dłuższych fragmentów pogrubionymi tytułami opisującymi ich cel lub rozważany w nich przypadek.

Podsumowując, uważam, że jest to solidna praca doktorska, której tematyka dotyczy ciekawych zagadnień badanych w algorytmicznej teorii grafów. W ramach rozprawy udzielono częściowych odpowiedzi na trudne pytania algorytmiczne i niewątpliwie stanowi ona oryginalny i zauważalny w środowisku wkład w rozwój dziedziny. Rozprawa doktorska prezentuje wysoką ogólną wiedzę teoretyczną oraz szeroki warsztat metodologiczny Marty Piecyk. Rozprawa dowodzi także, że jej autorka umie skutecznie stosować współczesne metody algorytmiczne oraz opisywać je w sposób klarowny. Bardzo bogata bibliografia wyraźnie pokazuje, że Marta Piecyk świetnie orientuje się w fachowej literaturze oraz w najnowszych wynikach naukowych dotyczących omawianej tematyki.

W moim przekonaniu przedstawiona rozprawa zdecydowanie spełnia wszelkie wymagania stawiane rozprawom doktorskim i niewątpliwie należy dopuścić Martę Piecyk do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora.

Andrzej Grzesik